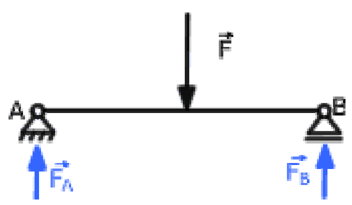
1.Grundlagen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns kurz mit dem Stoff, welcher später voraus gesetzt wird.
Falls es Dir in diesem Kapitel zu schnell geht, empfehle ich folgende Bücher:

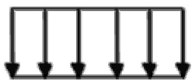
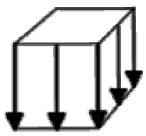
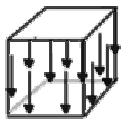
- **Kraus/Führer/Neukäter**: *Grundlagen der Tragwerkslehre*, 6. Aufl., Rudolf Müller Verlag, Köln 1995; ISBN 3-481-00792
- **Lohmeyer**: *Baustatik Teil 1 – Grundlagen*, 7. Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart 1996; ISBN 3-519-15025-5
- **Bochmann**: *Statik im Bauwesen Band 1 – Statisch bestimmte Systeme*, 20 Aufl. HUSS- Medien GmbH, Berlin 2001; ISBN 3-345-00750-9
- **Wagner/Erlhof**: *Praktische Baustatik 1*, 19. Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart 1994; ISBN 3-519-05260-1
- **Mann**: *Vorlesungen über Statik und Festigkeitslehre*, B.G. Teubner, Stuttgart; ISBN 3-519-05238-5

1.1 Kräfte

- → Alle Tragwerke werden von Kräften beansprucht.
- → Kräfte sind von uns nicht wahrnehmbar. Es ist nur möglich sie an ihrer Wirkung zu erkennen bzw. zu messen.
- → Sie sind vektorielle Größen. Um eine Kraft zu beschreiben benötigt man deshalb Betrag, Richtung und den Angriffspunkt.
- → Jeder Körper verformt sich unter Krafteinfluss. Diese Verformungen sind meist mit bloßem Auge nicht wahrnehmbar.
- → Wird eine Kraft nicht durch eine andere Kraft bzw. Kräfte im Gleichgewicht gehalten, erzeugt dies eine Bewegungsänderung.
- → Kräfte können entlang ihrer Wirkungslinien beliebig verschoben werden. Die Wirkung der Kraft auf das entsprechende System verändert sich bei der Verschiebung nicht.

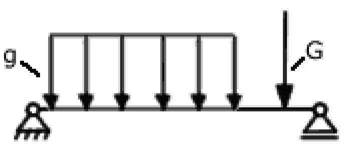
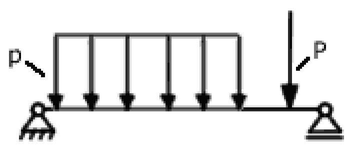
	Soll nun der hier symbolisch dargestellte Träger in Ruhe bleiben müssen alle 3 angreifenden Kräfte im Gleichgewicht stehen. Dies bedeutet: $F_A + F_B + F = 0$ Gilt diese Bedingung nicht, so würde der Träger beschleunigt werden.

1.2 Formen von Kräften

Bezeichnung	Darstellung	Beschreibung	Einheit
Punktkraft		Eine Kraft die an nur einem Punkt angreift. → idealisierte Rechenform	$N;kN;MN$
Linienkraft		Die Kräfte wirken auf einer Linie. → idealisierte Rechenform	$\frac{N}{m};\frac{kN}{m}$
Flächenkraft		Die Kräfte wirken auf eine Fläche verteilt. In Berechnungen wird diese Kraft oft in eine Linienkraft umgeformt.	$\frac{N}{m^2};\frac{kN}{m^2}$
Volumenkraft		Ursprüngliche Kraftform. Wirkt räumlich verteilt an allen Elementen eines Körpers infolge Beschleunigung (Schwerkraft).	$\frac{N}{m^3};\frac{kN}{m^3}$

1.3 Äußere Kräfte an Bauteilen

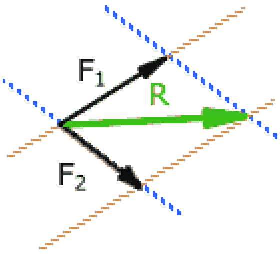
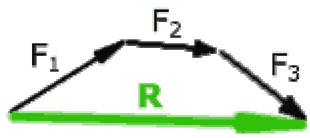
Kräfte die an Bauteilen angreifen, können entweder ständig oder auch veränderlich auf das Tragwerk wirken.

ständige Lasten	veränderliche- bzw. Verkehrslasten
→ Lasten der Baukörper selber → Dauernd/ ständig vorhanden → Punktkräfte werden meistens mit G und Linienkräfte mit g gekennzeichnet 	→ Größe und Angriffspunkt veränderlich → Eigenlasten aus Personen, Einrichtungen, Maschinen Fahrzeuge, Schnee, Wind, ... → Punktkräfte werden meistens mit P und Linienkräfte mit p gekennzeichnet. 

1.4 Zusammensetzen und zerlegen von Kräften

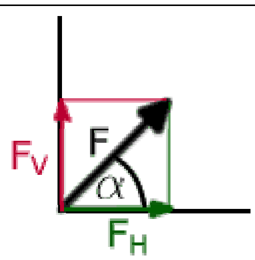
Das Zusammensetzen von Kräften entspricht einer Vektoraddition. Das Zerlegen verläuft entsprechend genau anders rum. Diese Vorgänge lassen sich nun rechnerisch und grafisch durchführen:

Grafische Beahandlung

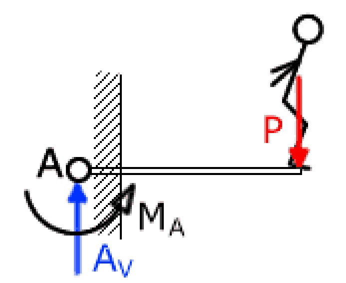
Kräfteparallelogramm	Krafteck
 Beim Kräfteparallelogramm greifen die Kräfte an einem Punkt an. Durch paralleles Verschieben der jeweiligen Wirkungslinie durch bis zur Spitze der anderen Kraft, erhält man ein Parallelogramm, dessen Diagonale die gesuchte Resultierende Kraft ist.	 Das Krafteck eignet sich besonders gut, wenn mehrere Kräfte addiert werden müssen. An der Spitze der ersten Kraft kommt der Fuß der zweiten usw. (Spitze an Fuß – Regel)

Rechnerische Ermittlung

Bei der rechnerischen Addition von Kräften, müssen diese in horizontale und vertikale Komponenten zerlegt werden. Durch Zusammenzählen der jeweiligen Einzelkomponenten erhält man die resultierende Kraft.
Die Kräfte werden nach folgenden Formeln zerlegt:

	$F_H = \cos\alpha \times F$
	$F_V = \sin\alpha \times F$
	$F^2 = F_H{}^2 + F_V{}^2$

1.5 Das Moment

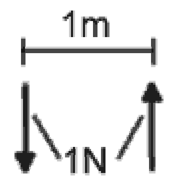


Dieses hier links dargestellte Sprungbrett stellt ein allgemeines ebenes Kraftsystem dar. Jedoch reichen die beiden Kräfte P und A_V nicht aus, das ganze System im Gleichgewicht zu halten; das Sprungbrett würde sich um den Punkt A nach rechts drehen. Die Gleichgewichtskomponente die nun hier linksherum entgegen wirkt ist das Moment (M_A).

Definition: 2 gleichgroße, parallel entgegengesetzt wirkende Kräfte sind ein Kräftepaar.
Das Drehmoment eines Kräftepaares ist der Betrag mal den Abstand. Die Einheit eines Moments ist: *Nm* oder *kNm.*
Das Moment M des rechts dargestellten Kräftepaares errechnet sich wie folgt:

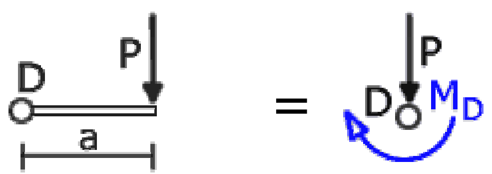
$$M = 1N \times 1m$$

Man beachte, dass der Betrag einer Kraft des Kräftepaares (1N) in die Berechnung eingeht.



Ersetzen von Kräften durch ein Moment

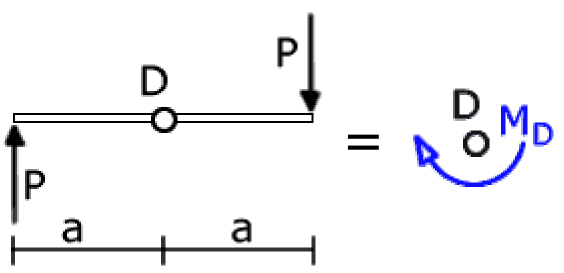
In diesem Beispiel vergleichen wir die Belastungen auf eine Schraube (Punkt D) durch 2 verschiedene Arten von Schraubenschlüsseln.



Die Schraube wird über **einen Hebel** gedreht.

→ **M_D=P × a**

→ Die außerhalb des Punktes D angreifende Kraft erzeugt ein Moment M_D und belastet die Schraube.



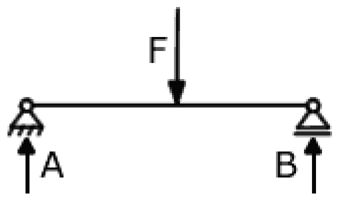
Die Schraube wird über **zwei Hebel** gedreht

→ **M_D=P × 2a**

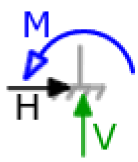
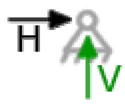
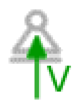
→ Das Moment errechnet sich aus dem Betrag des Kräftepaares (=P) und dem Abstand des Kräftepaares. Die Schraube wird hier nicht belastet, da sich die Kräfte gegenseitig aufheben.

1.6 Auflager

Ein Bauteil liegt auf einem anderen Bauteil auf. Es ist auf diesem *aufgelagert.* Die Verbindungsstelle zwischen diesen beiden Bauteilen bezeichnen wir als Auflager. Diese stellen das Gleichgewicht eines statischen Systems her. Wäre dies nicht der Fall, so wären unsere Systeme nicht statisch (in Ruhe), sondern würden beschleunigt werden.



Damit der links dargestellte Einfeldträger nicht vertikal beschleunigt wird, muss Folgendes gelten:
→ **A+B=F**
Die Kräfte A und B sind in dieser Gleichung unsere Variablen und richten sich nach der Belastung. Würde man nun das System mit 2F belasten, würde sich auch die Summe der Kräfte A und B verdoppeln.

Die 3 verschiedenen Arten von Auflagern			
Bezeichnung	**Einspannung**	**festes Auflager**	**verschiebliches Auflager**
Darstellung			
Aufnehmbare Kräfte	 → Horizontal → Vertikal → Momente	 → Horizontal → Vertikal	 → Vertikal
Wertigkeit	3- wertig	2- wertig	1- wertig

2. Statisch bestimmte Systeme

2.1 Definition

Eine Lagerung nennt man statisch bestimmt, wenn die Lagerreaktionen (Kräfte und Momente) allein aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar sind.

3 Gleichgewichtsbedingungen → 3 Lagerkräfte

Enthält ein System Gelenke, so ergibt sich aus jedem Gelenk eine zusätzliche Gleichgewichtsbedingung, da im Gelenk das Moment null ist. Die zusätzliche Bedingung lautet dort folglich M=0. Bei Trägern ohne Gelenke gibt es 3 Gleichgewichtsbedingungen, deshalb müssen 3 Lagerkräfte erfüllt sein. Bei Trägern mit n Gelenken benötigt es folglich 3+n Lagerkräfte und es gibt auch 3+n Gleichgewichtsbedingungen.

Beispiele von statisch bestimmten Systemen

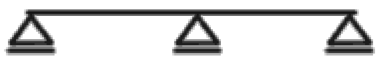
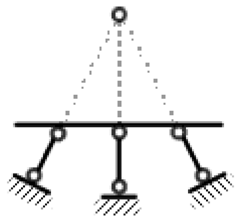
<table>
<tr><td colspan="6">Die nachfolgenden 5 Systeme sind alle statisch bestimmt. Darunter sind zuerst die Auflagerreaktionen und dann die vorhandenen Gleichgewichtsbedingungen aufgeführt.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
2+1=3
festes Auflager 2-wertig + verschiebliches Auflager 1-wertig</td><td colspan="2">
3=3
Einspannung 3-wertig</td><td colspan="2">
1+1+1=3
3 mal verschiebliches Auflager 1-wertig</td></tr>
<tr><td colspan="3">
1+2+1=3+1
1-2-1-wertiges Auflager zu 4 Gleichgewichtsbedingungen (eine aus dem Gelenk)</td><td colspan="3">
1+1+2+1=3+1+1
1-1-2-1-Wertiges Auflager zu 5 Gleichgewichtsbedingungen</td></tr>
</table>

2.2 Systeme, die nicht statisch bestimmt sind

Instabile Systeme

Ein System ist statisch instabil, wenn bei n Gelenken weniger als 3+n Lagerreaktionen zu Verfügung stehen, oder wenn sich die Wirkungslinien der Lagerkräfte in einem Punkt oder im Unendlichen schneiden (WL sind alle parallel zueinander). Instabile Tragwerke sind in der Baustatik nicht zulässig, da es zu großen Verformungen oder Einstürzen kommen kann.

Beispiele für instabile Systeme

 1+1≠3 1+1 Auflagerreaktionen für 3 gleichg. Bedingungen →System instabil	 2+1≠3+1 Hier gibt es zwar 3 Auflagerreaktionen, jedoch liefert das Gelenk eine zusätzliche Bedingung. → System instabil
 1+1+1=3 (Achtung!) Zwar gibt es hier 3 Auflagerreaktionen, jedoch sind die Wirkungslinien parallel zu einander, deshalb kann dieses System keine horizontalen Kräfte aufnehmen → instabil	 1+1+1=3 (Achtung!) Da sich die Wirkungslinien der Auflagerkräfte in einem Punkt schneiden ist dieses System instabil. Es können keine Momente um den Schnittpunkt aufgenommen werden. Das System muss sich erst verformen. → instabil

Statisch unbestimmte Systeme

Statisch unbestimmte Systeme haben bei n Gelenken mehr als 3+n Auflagerreaktionen. Deshalb nennt man sie auch überbestimmte Systeme. Es gibt Vor- und Nachteile dieser Tragwerke:

Vorteile:
- → Größere Steifigkeit, deshalb geringere Verformungen
- → Geringere Abmessungen
- → Oft besitzen diese Systeme auch eine zusätzlich versteckte Sicherheit.

Nachteile:
- → Schwieriger zu berechnen, da für die Berechnungen zusätzliche Bedingungen benötigt werden. Man behilft sich mit den auftretenden Verformungen.
- → Bei Lagersenkungen oder Temperaturveränderungen treten Zwängungen auf, die das Tragwerk zusätzlich belasten können.

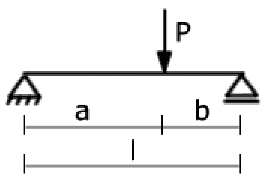
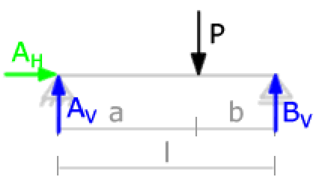
2.3 Berechnen der Auflagerreaktionen bei statisch bestimmten Systemen

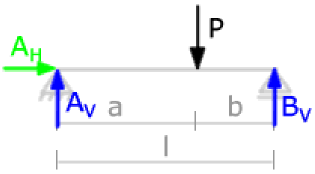
Bei statisch bestimmten Systemen ist es einfach die Auflagerreaktionen zu bestimmen. Man ermittelt diese unter zu Hilfenahme der 3 Gleichgewichtsbedingungen.

Der Einfeldträger

Zuerst betrachten wir uns das einfachste statische System, den Einfeldträger. Dieses statische System wird uns in der Statik oft begegnen (auch bei statisch unbestimmten Berechnungen).

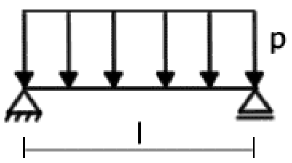
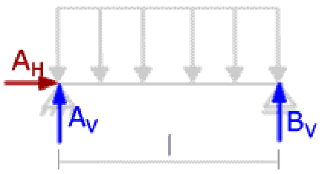
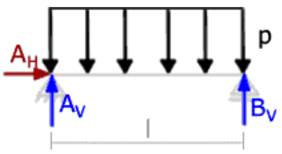
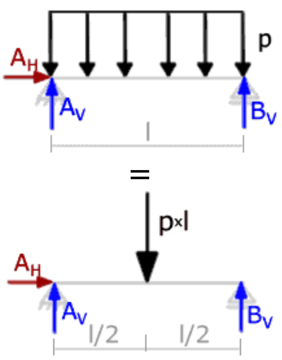
Einfeldträger unter einer Punktlast

Das System		Ein Einfeldträger mit einem festen und einem verschieblichen Lager und der Länge l wird mit einer Punktkraft P belastet. Die Lage der Kraft ist durch die Längen a und b bestimmt. Aus der Zeichnung → a+b=l. Wir bezeichnen das Auflager links mit A und rechts mit B.
Gesucht	→ $\mathbf{A_H}$ → $\mathbf{A_V}$ → $\mathbf{B_V}$	Die Auflagerreaktionen
Die Bedingungen	→ $\Sigma H = 0$ → $\Sigma V = 0$ → $\Sigma M = 0$	Als 2. Schritt stellen wir die vorhandenen bzw. benötigten Bedingungen dar. Da wir in unserem System kein Gelenk haben, schreiben wir nur die 3 Gleichgewichtsbedingungen auf. Die Summe der Momente, der horizontalen- und vertikalen Kräfte ist null.
Die Kräfte		Jetzt machen wir uns Gedanken über die Auflagerkräfte. Welche Kräfte können von unseren Auflagern aufgenommen werden. Wir bezeichnen die horizontalen Auflagerkräfte mit dem Index H und die vertikalen Kräfte mit V.

<table>
<tr><td rowspan="6">Die Berechnung</td><td>$\Sigma H = 0$
$A_H=0$</td><td>Nun bilden wir unser erstes Gleichgewicht. Die Summe aller horizontalen Kräfte ist 0. Da A_H die einzige horizontale Kraft ist, folgt $A_H=0$.</td></tr>
<tr><td>
$\Sigma V = 0$
$A_V+B_V-P=0$</td><td>Die Summe aller vertikalen Kräfte ist 0. Alle Kräfte die von unten nach oben wirken, sind positiv. Deshalb bekommt die Kraft P ein negatives Vorzeichen.</td></tr>
<tr><td>$\Sigma M_A = 0$
$P\times a-B_V\times l=0$</td><td>Die Summer aller Momente die um den Punkt A drehen ist 0. Rechtsdrehende Momente bekommen ein positives Vorzeichen.
Das Moment ist Kraft mal den Abstand. Da A_H und A_V direkt durch den Punkt gehen, erzeugen diese auch kein Moment.</td></tr>
<tr><td>$P\times a-B_V\times l=0$
$B_V=(P\times a)/l$</td><td>Formt man nun diese Gleichung um, erhält man schon die Auflagerkraft B_V.</td></tr>
<tr><td>$A_V+B_V-P=0$
$A_V+(P\times a)/l-P=0$
$A_V=P-(P\times a)/l$</td><td>Durch das Einfügen des Wertes für B_V in die Gleichung der vertikalen Summen, erhält man schließlich die Kraft A_V</td></tr>
<tr><td>Das Ergebnis</td><td>$A_H=0$
$A_V=P-(P\times a)/l$
$B_V=(P\times a)/l$</td><td>Da es in der Statik auch sehr komplizierte gibt, sollte man jedes Ergebnis auf Plausibilität prüfen. Dafür setzen wir mal a=0. Dies würde bedeuten, dass die Kraft auf dem Auflager A stehen würde, es müsste dann die ganze Kraft P direkt ins Auflager gehen. Und siehe da für a=0 erhält man $A_V=P$</td></tr>
</table>

Bei $\Sigma M_A = 0$ haben wir in der Berechnung alle Momente um den Punkt A null gesetzt. Natürlich ist es auch möglich über die Summe aller Momente um den Punkt B zu dem gleichen Ergebnis zu kommen.

B Einfeldträger unter einer Strecken-/Linienlast

Das System		Ein Einfeldträger mit einem festen und einem verschieblichen Lager und der Länge l wird mit einer Strecken-/Linienlast belastet. Die Last erstreckt sich gleichmäßig über die gesamte Länge l. Wir bezeichnen das linke Auflager wieder mit A und das rechte mit B.
Gesucht		Die Auflagerreaktionen: → A_H → A_V → B_V
Die Bedingungen	→ $\Sigma H = 0$ → $\Sigma V = 0$ → $\Sigma M = 0$	Die Gleichgewichtsbedingungen sind wie vorher die Summe der vertikalen- und horizontalen Kräfte und der Momente ist gleich null.
Die Kräfte		Wie schon bei dem vorherigen Beispiel tragen wir jetzt wieder alle am System angreifenden Kräfte an. Alle horizontal angreifenden Auflagerkräfte bekommen den Index H und alle vertikalen den Index V.
Die Umformung		Der einzige Schritt der vom ersten Beispiel abweicht ist das Umformen der Streckenlast in eine Punktlast. Der Betrag der Ersatzkraft ist p×l. Der Angriffspunkt ist l/2. Die Auflagerkräfte werden nun mit Hilfe dieser Ersatzkraft ermittelt. Vorgegangen wird genau so wie im vorherigen Beispiel.
Die Berechnung	$\Sigma H = 0$ $A_H=0$	Nun bilden wir unser erstes Gleichgewicht. Die Summe aller horizontalen Kräfte ist 0. Da A_H die einzige Kraft ist, folgt $A_H=0$.
	$\Sigma V = 0$ $A_V+B_V-(p\times l)=0$	Die Summe aller vertikalen Kräfte ist 0. Alle Kräfte die von unten nach oben wirken, sind positiv.
	$\Sigma M_A = 0$ $(p\times l\times l/2)-(B_V\times l)=0$	Die Summe aller Momente die um den Punkt A drehen ist 0. Rechtsdrehende Momente bekommen ein positives Vorzeichen. Das Moment ist Kraft mal den Abstand. Da A_H und A_V direkt durch den Punkt gehen, erzeugen diese auch kein Moment.

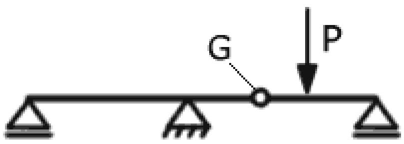
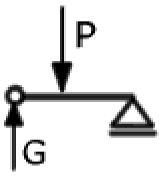
Einfeldträger unter einer Strecken-/Linienlast

	$B_V=(p \times l)/2$	Formt man nun diese Gleichung um erhält man schon die Auflagerkraft B_V.
	$A_V+B_V-(p \times l)=0$ $A_V+(P \times l)/2 - p \times l=0$ $A_V=(p \times l)/2$	Durch das Einfügen des Wertes für B_V in die Gleichung der vertikalen Summen, erhält man schließlich die Kraft A_V
Das Ergebnis	$A_H=0$ $A_V=(p \times l)/2$ $B_V=(p \times l)/2$	Da keine horizontalen Kräfte am System angreifen ist A_H null. Als Kontrolle betrachten wir nun die Auflagerkräfte. Da sich die Linienlast über die ganze Länge gleichmäßig wirkt, muss A_V und B_v gleich groß sein.

Der Mehrfeldträger

Die Ermittlung der Auflagerkräfte eines Mehrfeldträgers ist nicht schwieriger oder komplizierter wie die eines Einfeldträgers. Der einzige Trick bei der Ermittlung der Auflagerreaktionen ist das Zerlegen des Trägers in lauter Einfeldträger und Träger mit Kragarmen.
Die zusätzlichen Gleichgewichtsbedingungen erhält man durch das Bestimmen der Gelenkkräfte, wobei diese einmal wie Auflagerkräfte und das andere mal wie äußere Lasten behandelt werden. Wie dies nun genau gehandhabt wird erklärt am Besten ein Beispiel.

Zerlegung eines Mehrfeldträgers

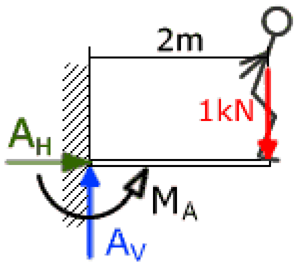
	In unserem Beispiel betrachten wir einen 2 Feldträger mit einem Gelenk. Das System ist statisch bestimmt (siehe Kapitel 2.1) Nun schneiden wir durch das Gelenk G und betrachten die beiden freigeschnittenen Systeme separat.
	Die Auflager- und Gelenkreaktionen dieses „Einfeldträgers“ werden nun wie gewohnt bestimmt. Wobei hier G die Auflagerkraft A_V ersetzt. Würden hier horizontale Kräfte auftreten, würden auch horizontale Gelenkkräfte freigeschnitten. Somit können wir mit Hilfe der 3 Gleichgewichtsbedingungen die G und die andere Auflagerreaktion bestimmen.
	Das links freigeschnittene System stellt einen Träger mit Kragarm da. Die zuvor ermittelte Gelenkkraft G wirkt hier als Belastung. Die Auflagerreaktionen können nun hier schon bekannt ermittelt werden.

Der Kragträger bzw. Kragarm

Die Auflagerreaktionen eines Kragträgers bzw. eines Kragarmes zu bestimmen ist unkompliziert, da alle auftretenden Kräfte und Momente nur von einem Auflager aufgenommen werden. Aus der jeweiligen Gleichgewichtsbedingung folgt sofort die entsprechende Auflagerreaktion.

Betrachten wir nun das Beispiel von Kapitel 1.5. Der Springer auf seinem Sprungbrett.

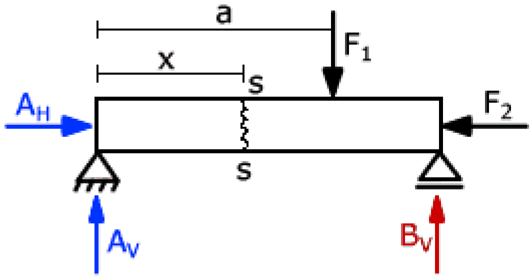
Bestimmung der Auflagerreaktionen bei einem Kragarm

	Der Springer auf dem Sprungbrett, welches der einfacher halber an einer Wand eingespannt ist, belastet das Brett mit 1kN. Dabei ist sein Abstand zur Einspannung 2m. Da hier nur ein Auflager vorhanden ist, muss dieses alle 3 Auflagereaktionen aufnehmen können. In dem Bild sind schon alle 3 Auflagerreaktionen aufgezeichnet. Alleine schon aus dem Bild kann man hier die meisten Auflagerreaktionen ableiten.
$A_H=0$	Da an diesem System keine horizontalen Lasten angreifen gibt es auch keine horizontale Auflagerreaktion
$A_v=1kN$	Da die einzig vertikal angreifende Kraft 1kN beträgt, muss die horizontale Auflagerkomponente den gleichen Betrag besitzen und entgegengesetzt wirken.
$M_A=1kN\times 2m$ $M_A=2kNm$	Aus der Summe aller Momente um den Punkt A folgt, dass das Moment im Auflager A (1kN×2m) 2kNm sein muss.

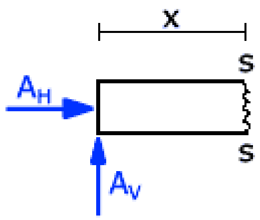
2.4 Schnittgrößen

Bisher haben wir nur die am Tragwerk von außen angreifenden Kräfte und Belastungen betrachtet. Das System wirkt jedoch auch mit inneren Kräften und Momenten entgegen der Belastung. Kann das System zum Beispiel die vorhandene Belastung nicht aufnehmen kommt es zu großen Verformungen oder sogar zum Bruch. Eine schwach gespannte Wäscheleine hängt z.B. nach unten durch, wenn diese belastet wird. Das kommt daher, dass dieses Seil keine inneren Schnittgrößen direkt entgegen der Erdanziehung aufbringen kann. Ein Holzbalken z.B. kann dies und biegt sich bzw. verformt sich deshalb nicht so stark.

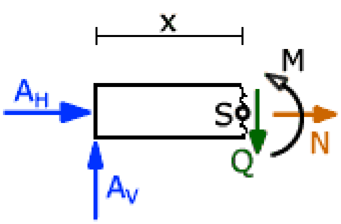
Schnittgrößenbestimmung



Der oben dargestellte Einfeldträger wird durch zwei Kräfte F_1 und F_2 belastet. Diese Kräfte erzeugen die Auflagerreaktionen A_H, A_V und B_V. Nun schneiden wir in einem Abstand x vom linken Auflagerrand durch den Querschnitt (gedanklicher Schnitt s-s). Der Träger hat eine beliebige Länge L. Im Abstand a vom linken Auflagerrand greift die Kraft F_1 an.



Betrachtet man nun den linken Trägerteil allein, mit den daran angreifenden Kräften (inkl. Auflagerkräfte), fällt auf, dass dieses System, nicht mehr im Gleichgewicht steht.



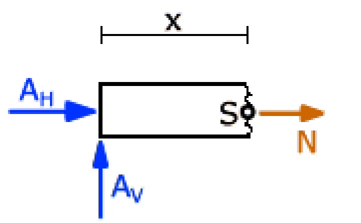
Um nun das Gleichgewicht wieder herstellen zu können wurden nun die möglichen Schnittgrößen eingezeichnet, jeweils so das diese positiv wirken. Um nun den Betrag und das Vorzeichen zu bestimmen, stellt man alle 3 Gleichgewichtsbedingungen im Punkt S auf. Es gibt insgesamt 3 verschiedene Schnittgrößen:
N (Normalkraft oder Längskraft)
Q (Querkraft)
M (Biegemoment)

Die Normalkraft bzw. Längskraft

Die Normalkräfte wirken parallel zur Stabachse im Trägerteil. Diese sind auch als Zug- oder Druckkräfte bekannt.
Normalkräfte die an unserem System ziehen haben ein positives- und welche daran drücken ein negatives Vorzeichen.

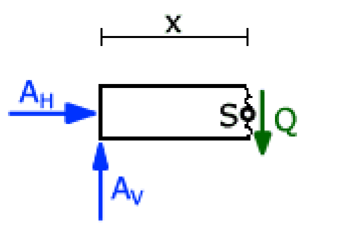
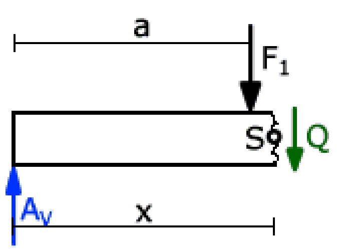
Ein kleiner Tipp zur Vorzeichenregelung bei Normalkräften:

> Wenn mich jemand unter **Druck** setzt, dann finde ich das **negativ**. Wenn mich aber jemand einen Berg hinauf **zieht**, dann ist das **positiv**.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>In unserem Beispiel haben wir nun die Normalkraft (positiv wirkend) angetragen. Aus der Summe der horizontalen Kräfte folgt somit:
$A_H+N=0$
$N=-A_H$
Aus dem Vorzeichen folgt, dass es sich hier um eine Druckkraft handelt, da dieses negativ ist.</td>
</tr>
</table>

Die Querkraft

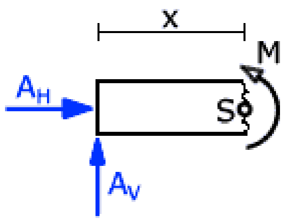
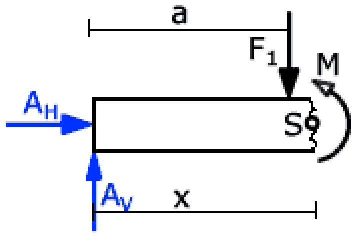
Die Querkräfte wirken lotrecht zur Stabachse. Sie sind positiv, wenn sie am linken Teil des freigeschnittenen Trägers (linkes Schnittufer) von oben nach unten und am rechten Teil von unten nach oben gerichtet sind.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Bei unserem Beispiel bilden wir nun für die Bestimmung der Querkraft die Summe der horizontalen Kräfte:
$A_V-Q=0$
$Q=A_V$
Die Querkraft ist nun hier positiv. Jedoch muss beachtet werden, dass dies nur bis zum Abstand a vom linken Auflagerrand gilt, da am Träger dort noch eine zusätzliche vertikale Kraft (F_1)angreift.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Nachdem die Kraft F_1 angreift ändert sich die Querkraft, da F_1 zusätzlich zur Auflagerkraft wirkt. In diesem Fall:
$A_V-Q-F_1=0$
$Q=A_V-F_1$
Man könnte die Querkraft jedoch auch über das rechte Schnittufer berechnen. Zu Beachten wäre hier nur, dass dort die Querkraft positiv ist, wenn diese von unten nach oben wirkt.</td>
</tr>
</table>

Das Biegemoment

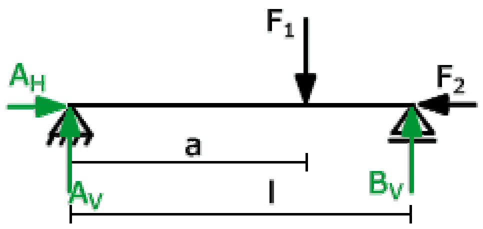
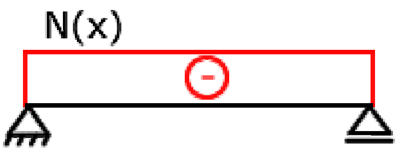
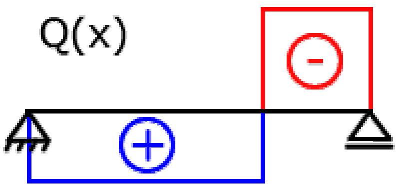
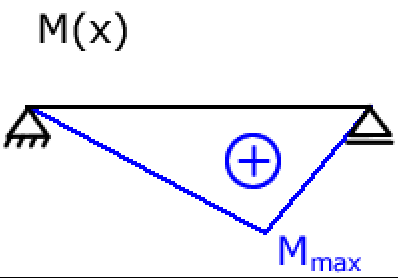
Die von außen an einem Träger angreifenden Kräfte werden über den Träger in die Auflager abgeleitet. Schneidet man nun durch ein System, so stellt man fest, dass dieses dadurch verdreht werden würde. Um nun hier wieder ein Gleichgewicht herstellen zu können wirkt als innere Größe das

Biegemoment entgegen. Es wird bezogen auf den Schwerpunkt des entsprechenden Schnittes ermittelt.
Ein Biegemoment ist vom Betrag her positiv, wenn es an der Unterseite des Trägers Zug erzeugt (wenn sich der Träger nach unten durchbiegt).

	Bei unserem Beispiel bilden wir nun für die Bestimmung des Biegmomentes die Summe aller Momente um den Punkt S: $M-A_V \times x=0$ $M=A_V \times x$ Da die Wirkungslinie von A_H durch den Punkt S geht, erzeugt diese Kraft kein Moment. An dem Ergebnis ist weiterhin auffällig, dass dieses keinen konstanten Wert liefert sondern von x abhängig ist.
	Wie schon bei der Querkraft gilt das obere Ergebnis nur so lange keine weitere Kraft angreift. Das angreifen einer Kraft erzeugt einen Knick im Momentenverlauf. Für x größer a gilt: $M-A_V \times x+F_1 \times (x-a)=0$ $M=-x(A_V+F_1)+ F_1 \times a$

Grafische Darstellung - Zustandslinien

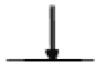
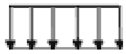
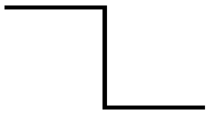
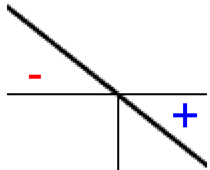
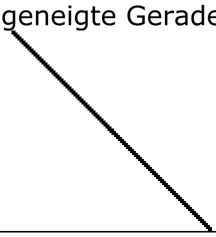
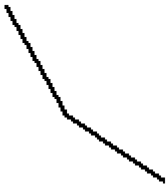
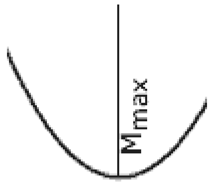
Da die Schnittgrößen über die Länge jeweils veränderliche Werte oder sogar Sprünge aufweisen, werden diese grafisch Dargestellt. So werden die Verläufe übersichtlich und verständlich.
Die jeweiligen Linienzüge stellen die Funktionen N(x), Q(x) und M(x) dar. Sie werden auch als Zustandslinien bezeichnet. Für unser Beispiel sehen die Zustandslinien folgendermaßen aus:

	Hier sind alle am System angreifenden Kräfte angetragen. Die Auflagerkräfte sind: $A_H=F_2$ $A_V=F_1-(F_1\times a)/l$ $B_V=(F_1\times a)/l$
	Bei diesem System erzeugen nur die horizontalen Lasten eine Normalkraft. Da es sich hier um Druck handelt ist das Vorzeichen negativ. Da zwischen den Auflagern keine horizontale Kraft angreift, ist der Normalkraftverlauf konstant. $N(x)=F_2$
	Der Querkraftverlauf ergibt sich rein aus den vertikalen Kräften. Der Sprung am linken Auflager ist vom Betrag her so groß wie A_V, rechts wie B_V und in der Mitte ist der Sprung F_1.
	Das maximale Moment M_{max} lässt sich ermitteln, indem man im Abstand a vom linken Auflagerrand gedanklich den Träger durchschneidet und dann das Gleichgewicht an dieser Stelle bildet. $M_{max}-A_V\times a=0$ $M_{max}=A_V\times a$ $M_{max}=[F_1-(F_1\times a)/l]\times a$

2.5 Zusammenhänge Belastung – Schnittgrößen

Zwischen der Belastung und der Schnittgrößen bestehen Beziehungen. Für die gängigsten Lastarten lohnt es sich den Verlauf zu merken. So ist es möglich den Verlauf der Schnittgrößen schnell und mit geringstem Rechenaufwand zu ermitteln.

Folgende Tabelle stellt die wichtigsten Beziehungen zwischen der Belastung, des Querkraft- und Momentenverlaufes dar:

	keine Last		
Q	horizontal	Sprung 	geneigte Gerade 
M	geneigte Gerade 	Knick 	quadratische Parabel 
	In Bereichen wo keine Last angreift verläuft die Querkraft immer horizontal (konstant) und das Moment immer als geneigte Gerade.	Greift eine einzelne Last bzw. Kraft an, so springt der Querkraftverlauf um deren Betrag. Im Momentenverlauf ist an dieser Stelle dann ein Knick.	Linienlasten bewirken, dass sich der Querkraftverlauf direkt proportional ändert. Der Verlauf des Momentes ist eine Quadratische Parabel.

Aus dem Diagramm lässt sich auch eine gewisse Beziehung zwischen der Querkraft und des Momentes erkennen.
Betrachten wir nun die Verläufe als Funktionen, so kann man feststellen, dass der Wert der Querkraft immer die Steigung des Momentes darstellt. Daraus lassen sich nun ganz einfach ein paar Beziehungen herleiten:

- → am Nulldurchgang der Querkraft befindet sich M_{max}
- → ist Q(x) positiv so steigt der Momentenverlauf
- → ist Q(x) negativ so fällt der Momentenverlauf
- → gibt es einen Sprung im Querkraftverlauf, springt die Steigung des Momentanverlaufes (deshalb entsteht ein Knick)

Die Beziehung zwischen Belastung, Querkraft und Moment lassen sich auch mathematisch darstellen. Über die Differentialbeziehung der

Biegelinie lässt sich diese herleiten. Auf die Herleitung möchte ich nicht eingehen, da die praktische Anwendung hier im Vordergrund steht.

Es besteht folgende Beziehung:

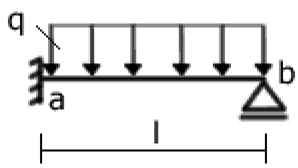
M(x)=Q'(x)=q"(x)	(q = Belastung)
Die erste Ableitung des Momentenverlaufes ergibt den Querkraftverlauf und die zweite den Verlauf der Belastung. Integriert man einfach die Belastung über die Länge des Trägers bekommt man den Querkraftverlauf usw.	

3. Kraftgrößenverfahren

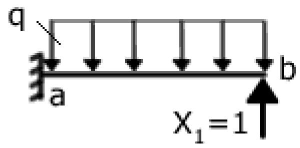
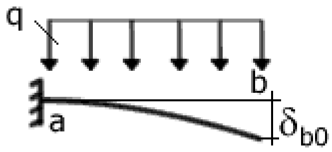
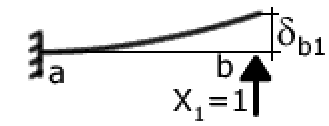
3.1 Prinzip

Das Prinzip des Kraftgrößenverfahrens ist es ein statisch unbestimmtes System durch Einschalten von Gelenken und Zerschneiden von Stäben oder durch Wegnahme von Auflagerkräften, in ein statisch bestimmtes System zu verwandeln. Es werden so viele Fesselungen gelöst und zusätzliche Freiheitsgrade geschaffen, dass gerade noch ein unbewegliches statisch bestimmtes system übrigbleibt. Dieses System heißt **statisch bestimmtes Hauptsystem**. An ihm werden alle Berechnungen vorgenommen. Einmal werden die Schnittgrößen an diesem System durch die äußeren Lasten ermittelt (**Lastspannungszustand**). Anschließend wird für jede entfernte Fesselung deren Gelenk- bzw. Auflagerkräfte oder Momente angetragen und die Schnittgrößen daraus ermittelt (**Eigenspannungszustand**). Nun können die Durchbiegungen oder Verformungen (Delta-Werte) errechnet werden. Mit Hilfe der Verträglichkeitsbedingung, z.B. dass an einem 'entfesselten' Auflager die Durchbiegung null ist, können nun die Größen der Fesseln bestimmt werden. Durch Superposition der Schnittgrößen von Last- und Eigenspannungszustand erhält man letztendlich die Größen des statisch unbestimmten Systems.
In der Theorie mag sich das alles ganz schön verwirrend anhören, aber in der Praxis ist es dann doch relativ einfach. Das nächste Beispiel eines 1-fach statisch unbestimmten Systems soll das Prinzip des Kraftgrößenverfahrens anschaulich verdeutlichen.

B **Einseitig eingespannter Träger**

Das System		Ein Träger mit der Länge l wird über seine gesamte Länge mit einer Streckenkraft q belastet. Am linken Auflagerrand befindet sich der Punkt a und am rechten der Punkt b. Das System ist 1-fach statisch unbestimmt, deshalb können die vorhandenen Auflagerkräfte nicht durch die 3 Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden.

B Einseitig eingespannter Träger

Statisch bestimmtes Ersatzsystem		Der erste Schritt ist das Herstellen eines statisch bestimmten Ersatzsystems. Dafür müssen wir in diesem Fall eine Auflagerreaktion 'entfesseln'. Hierfür gibt es 4 verschiedene Möglichkeiten. Hier ersetzen wir die Auflagerkraft B_V durch die Kraft X_1. Den Betrag der Kraft setzen wir 1. Somit ist dieses System unbeweglich und statisch bestimmt.
Lastspannungs-zustand		Nun betrachten wir das System wie es sich unter der ursprünglichen Belastung verformt. Der Punkt b wird um den Betrag δ_{b0} (delta $_{b0}$) nach unten verschoben. Der erste Index (b) bezeichnet den Ort und der Zweite (0) die Kraft bzw. die Ursache der Verschiebung. Der Lastspannungszustand erhält immer den Index 0.
	$\delta_{b0} = \frac{ql^4}{8EI}$	Die Durchbiegung δ_{b0} entnehmen wir vorerst mal einem Tabellenwerk (z.B. Schneider Bautabellen) später werden wir diese Formel noch selber herleiten.
Eigenspannungs-zustand		Nun betrachten wir wie stark unsere angebrachte Kraft 1 den Träger nach oben biegt. Da diese Kraft Ursprünglich vom System (Auflager) stammt nennt man dies den Eigenspannungszustand. Bei n-fach statisch unbestimmten Systemen gibt es n Zustände. Da dies der erste ist, erhält dieser den Index 1 folglich heißt die Verschiebung des Punktes b hier δ_{b1}.
	$\delta_{b1} = \frac{Pl^3}{3EI} = -\frac{1l^3}{3EI}$	Wieder entnehmen wir die Formel aus einem Tabellenwerk. ACHTUNG! Negatives Vorzeichen, da der Träger in anderer Richtung wie durch q verschoben wird.
Verträglichkeits-bedingung	$X_1\delta_{b1} + \delta_{b0} = 0$	Da am Punkt b durch das vorhandene Auflager keine Verschiebung statt finden kann muss sich die Verschiebung durch die Belastung q mit der aus X_1 aufheben. Also X_1 mal die Verschiebung aus der Kraft 1 PLUS die Verschiebung von q ist null.

Einseitig eingespannter Träger

Lösung	$-X_1 \frac{1l^3}{3EI} + \frac{ql^4}{8EI} = 0$ $X_1 = \frac{3}{8} ql$	Durch Einsetzen in die Verträglichkeitsbedingung erhalten wir dann schließlich den Wert für X_1. Da dies den Wert 1 hatte ist dies zugleich der Wert für B_V. Nun gibt es nur noch 3 unbekannte Auflagerreaktionen, welche, wie schon bekannt, mit Hilfe der 3 Gleichgewichtsbedingung bestimmt werden können.

3.2 Prinzip der virtuellen Kräfte

Mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte ist es möglich Verformungen an beliebigen Stellen von beliebig belasteten Systemen zu berechnen. Es ist dem Prinzip der virtuellen Arbeiten untergeordnet. Dabei wird die gespeicherte Energie der äußeren Arbeit gleichgesetzt. Da für das Kraftgrößenverfahren die Anwendung im Vordergrund steht möchte ich auf die Herleitung der jeweiligen Prinzipien verzichten. Für alle die an diesem Thema näher interessiert sind, empfehle ich folgende Bücher:

- **Wagner/Erlhof:** *Praktische Baustatik 3*, 8. Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart 1997; ISBN 3-519-35203-5
- **Hirschfeld:** *Baustatik – Theorie und Beispiele Teil 1 u. 2*, 3. Aufl., Springer Verlag, Heidelberg 1984; ISBN 3-540-04561-9
- **Cziesielski:** *Hütte – Bautechnik IV – Konstruktiver Ingenieurbau 1*, 29. Aufl., Springer Verlag, Heidelberg 1988; ISBN 3-540-18352-3
- **Bochmann:** *Statik im Bauwesen Band 3 – Statisch unbestimmte Systeme*, 12. Aufl., HUSS-Medien GmbH, Berlin 2001; ISBN 3-345-00752-5

Theorie

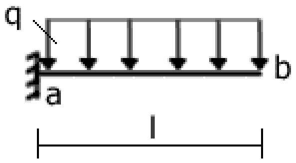
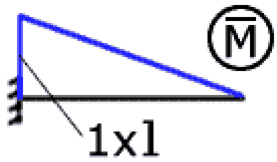
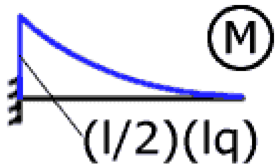
Die Ermittlung der Verformung an einem System erfolgt mit 4 Schritten:

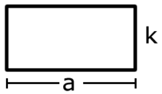
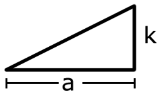
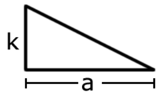
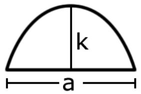
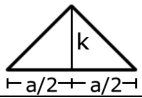
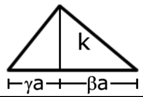
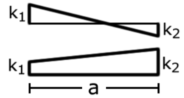
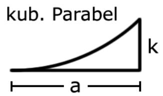
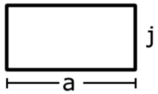
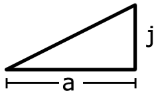
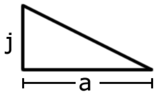
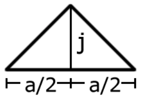
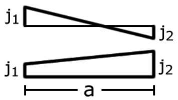
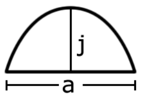
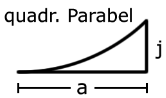
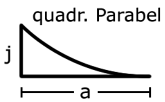
1. Virtuelle Hilfskraft (mit der Größe 1) an der Stelle x anbringen
2. Momentenverlauf daraus bestimmen
3. Tatsächlicher Momentenverlauf
4. Arbeitssatz

$$\overline{1} * w(x) = \int \frac{\overline{M}M}{EI} ds$$

Das ganze erkläre ich am besten mit einem Beispiel. Berechnen wir einfach die vom vorherigen Beispiel aus Tabellenwerken entnommenen Durchbiegunge (δ_{b0}).

Durchbiegung eines Kragarms

Das System		Ein Träger mit der Länge l wird über seine gesamte Länge mit einer Streckenkraft q belastet. Am linken Auflagerrand befindet sich der Punkt a und am rechten der Punkt b.
virtuelle Hilfskraft		Nun bringen wir eine Hilfskraft mit der Größe 1 an der Stelle an, wo wir die Durchbiegung bestimmen wollen. In unserem Fall im Punkt b.
Momentenverlauf aus der Hilfskraft		Jetzt bestimmen wir den Momentenverlauf. Wir haben einen dreiecksförmigen Verlauf mit dem maximalen Wert von 1×l.
tatsächlicher Momentenverlauf		Der durch die Streckenlast auftretende Momentenverlauf ist eine quadratische Parabel mit dem einem Maximum von (l/2)(lq)=1/2 l²q.
Arbeitssatz	$\overline{1} * w(x) = \int \frac{\overline{M}M}{EI} ds$	Der Arbeitssatz besagt, dass die Durchbiegung an der Stelle x das Integral der beiden Momentenverläufe durch EI über s bis x ist. Durch schon vorgefertigte Integrationstabellen (siehe nächste Seite) ist die Auflösung dieses Integrals relativ einfach.
Integrations-tabelle	$\frac{1}{4} ajk$	Aus dieser Tabelle entnehmen wir für Dreiecks- und Parabelverlauf (Zelle b7) den Faktor ¼.
Einsetzen	$\overline{1} w = \frac{1}{EI} \frac{1}{4} l \times \frac{1}{2} l^2 q \times l$ $w = \frac{ql^4}{8EI}$	Nun müssen die entsprechenden Werte nur noch eingesetzt und aufgelöst werden. ACHTUNG: EI nicht vergessen! Dies bleibt durch die Integration konstant und kann deshalb vor das Integral geholt werden. Das Ergebnis können wir nun mit dem beim vorherigen Beispiel dem Tabellenwerk entnommenen vergleichen. Und beide Formeln stimmen über ein.

		a	b	c	d	e	f	g	h
	$\int \frac{\overline{M}M}{EI} ds$								
1		ajk	$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{2}{3}ajk$	$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{2}aj(k_1+k_2)$	$\frac{1}{4}ajk$
2		$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{6}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{1}{6}ajk(1+\gamma)$	$\frac{1}{6}aj(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{5}ajk$
3		$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{6}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{1}{6}ajk(1+\delta)$	$\frac{1}{6}aj(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{20}ajk$
4		$\frac{1}{2}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{5}{12}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{12}ajk\frac{3-4\gamma^2}{\delta}$ $für \gamma \le \delta$	$\frac{1}{4}aj(k_1+k_2)$	$\frac{3}{32}ajk$
5		$\frac{1}{2}a(j_1+j_2)k$	$\frac{1}{6}a(j_1+2j_2)k$	$\frac{1}{6}a(2j_1+j_2)k$	$\frac{1}{3}a(j_1+j_2)k$	$\frac{1}{4}a(j_1+j_2)k$	$\frac{1}{6}a[j_1(1+\delta)$ $+j_2(1+\gamma)]k$	$\frac{1}{6}a[j_1(2k_1+k_2)$ $+j_2(k_1+2k_2)]$	$\frac{1}{20}ak(j_1+4j_2)$
6		$\frac{2}{3}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{8}{15}ajk$	$\frac{5}{12}ajk$	$\frac{1}{3}ajk(1+\gamma\delta)$	$\frac{1}{3}aj(k_1+k_2)$	$\frac{2}{15}ajk$
7		$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{1}{12}ajk$	$\frac{1}{5}ajk$	$\frac{7}{48}ajk$	$\frac{1}{12}ajk$ $(1+\gamma+\gamma^2)$	$\frac{1}{12}aj(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{60}ajk$
8		$\frac{1}{3}ajk$	$\frac{1}{12}ajk$	$\frac{1}{4}ajk$	$\frac{1}{5}ajk$	$\frac{7}{48}ajk$	$\frac{1}{12}ajk$ $(1+\delta+\delta^2)$	$\frac{1}{12}aj(3k_1+k_2)$	

3.3 Algorithmus des Kraftgrößenverfahrens

Das Kraftgrößenverfahren folgt immer einem gleichen Ablauf. Dieser Algorithmus wurde am Anfang des Kapitels schon einmal erläutert und besteht aus 5 verschiedenen Hauptpunkten:

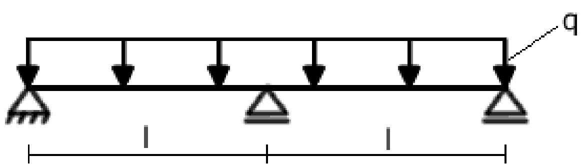
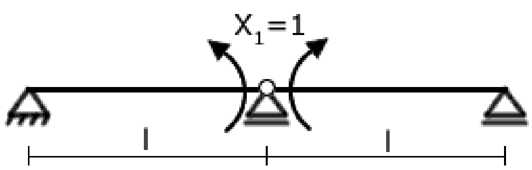
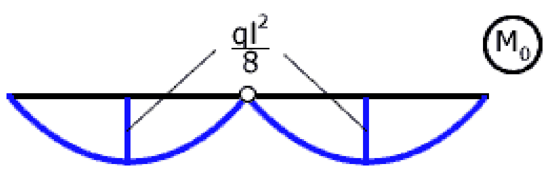
1. **Statisch bestimmtes System** herstellen
2. Antragen der Schnittgrößen am statisch bestimmten Ersatzsystem (**Lastspannungszustand**)
3. Bestimmung der Schnittgrößen aus den Ersatzkräften bzw. Momenten (**Eigenspannungszustand**)
4. **Berechnen der δ-Werte** (Delta)
5. Aufstellen und -lösen der **Verträglichkeitsbedingungen**

Bei Berechnungen an komplizierten mehrfach statisch unbestimmten Systemen hilft es, Punkt für Punkt vor zu gehen.

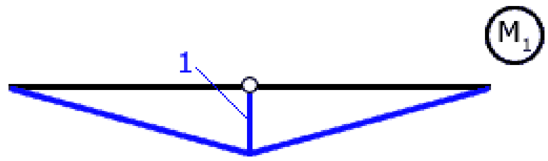
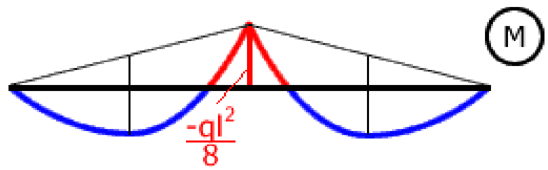
3.4 Beispiele

B

Der 2-Feld Träger

Das System	
	Ein zweifeldträger (1-fach statisch unbestimmt) wird über seine gesamte Länge (2l) mit einer Linienlast q belastet.
1. statisch bestimmtes Ersatzsystem	
	Wie schon im Kapitel 3.1 beschrieben gibt es mehrer Möglichkeiten ein statisch bestimmtes Ersatzsystem herzustellen. Hier setzen wir nun Gelenk über dem mittleren Auflager ein und tragen ein Moment mit der Größe 1 an.
2. Lastspannungszustand	
	Der Lastspannungszustand Beschreibt die Schnittgrößen am Ersatzsystem unter der von außen wirkenden Last. Der Momentenverlauf ist parabolisch mit dem maximal Wert ql²/8.

Der 2-Feld Träger

3. Eigenspannungszustand	
	Der Eigenspannungszustand beschreibt die Schnittgrößen durch das Ersatzmoment. Der Verlauf ist an der Stelle wo das Moment angebracht wurde 1 und nimmt zu den Auflagern linear ab.
4. Berechnen der δ- Werte	
$EI\delta_{10} = \frac{1}{3} l \frac{ql^2}{8} 1 + \frac{1}{3} l \frac{ql^2}{8} 1 = \frac{1}{12} ql^3$	Laut der Integrationstabelle (Zeile 2 und 3 und Spalte d) ist der Faktor jeweils immer 1/3. Der hier ermittelte Wert stellt nun die Verdrehung des Trägers am Gelenk durch die Streckenlast dar.
$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} l \times 1 \times 1 + \frac{1}{3} l \times 1 \times 1 = \frac{2}{3} l$	Bei der Überlagerung des Eigenspannungszustandes ist der Faktor jeweils 1/3 (siehe Integrationstabelle Zeile 2-3 und Spalte b-c). Dieser Wert hier beschreibt die Verdrehung durch das Moment 1.
5. Verträglichkeitsbedingung	
$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$ $\frac{2}{3} l \times X_1 + \frac{1}{12} ql^3 = 0$ $X_1 = -\frac{ql^2}{8}$	Da der Träger am mittleren Auflager keine Verdrehung aufweist, gilt wieder die Verträglichkeitsbedingung.
Lösung	
	Der tatsächliche Momentenverlauf wird nun durch die Überlagerung der beiden Zustände erreicht, wobei der Eigenspannungszustand mit X_1 multipliziert wird.